PART2　2次曲線の接線

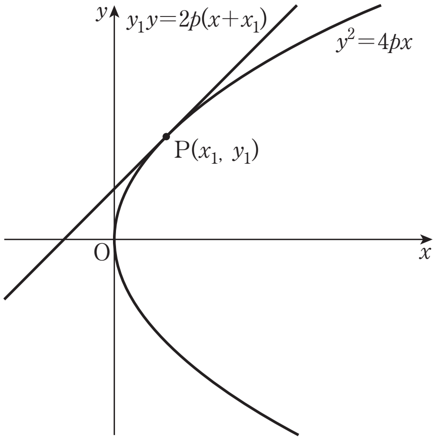
要点整理と公式

要点① 2次曲線の接線の方程式

放物線 $y^2=4px$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$$y_1y=2p(x+x_1)$$

で表される。



(証明)

$$\begin{cases} y^2=4px & \cdots\cdots① \\ y_1y=2p(x+x_1) & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①より $y^2=2\cdot 2px$　……①′

②より $2px=y_1y-2px_1$　……②′

①′ に②′ を代入して x を消去すると

$$y^2=2(y_1y-2px_1) \qquad y^2-2y_1y+4px_1=0 \quad \cdots\cdots③$$

また，点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ は放物線①上の点より

$$y_1{}^2=4px_1 \quad \cdots\cdots④$$

④を③に代入して

$$y^2-2y_1y+y_1{}^2=0 \qquad (y-y_1)^2=0 \qquad y=y_1$$

よって，2次方程式③が重解 $y=y_1$ をもつので，直線 $y_1y=2p(x+x_1)$ は，放物線 $y^2=4px$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線である。

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は $\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は $\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は $\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=-1$

であることが知られている。

[MEMO]

2 (1) 次の曲線上の与えられた点における接線の方程式を求めよ。

(i) $y^2=8x$ $(2,\ -4)$　　(ii) $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{4}=1$ $(\sqrt{3},\ \sqrt{2})$

(iii) $x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$ $(2,\ 2\sqrt{3})$　　(iv) $x^2-2y^2=-2$ $(-4,\ 3)$

(2) 点 $(0,\ 2)$ から楕円 $2x^2+y^2=2$ に引いた接線の方程式を求めよ。

Point Pickup

2次曲線上の点における接線

放物線 $y^2=4px$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は $y_1y=2p(x+x_1)$

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は $\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は $\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は $\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=-1$

イメージとしては，2次曲線の式の y を1つだけ y_1 に，x を1つだけ x_1 に変えたもの。

2次曲線上にない点 $(a,\ b)$ から引いた接線

① 2次曲線上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式が点 $(a,\ b)$ を通る，と考える。

② 点 $(a,\ b)$ を通る直線が2次曲線に接する，と考える。

第 2 講 PART2 確認問題

1 放物線 $y^2=16x$ 上の点 $(1,\ 4)$ における接線の方程式は，

$y=$ ア $x+$ イ である。

2 楕円 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{8}=1$ 上の点 $(1,\ -2)$ における接線の方程式

は，$y=$ ウ $x-$ エ である。

3 双曲線 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 上の点 $(-2,\ 3)$ における接線の方程

式は，$y=-$ オ $x-$ カ である。

4 双曲線 $2x^2-y^2=-4$ 上の点 $(4,\ 6)$ における接線の方程

式は，キ $x-$ ク $y+2=0$ である。

5 点 $(0,\ 4)$ から楕円 $4x^2+y^2=8$ に引いた接線の方程式は，

$y=$ ケ $x+$ コ

$y=-$ ケ $x+$ コ

である。

PART2　2次曲線の接線

2　(1)　次の曲線上の与えられた点における接線の方程式を求めよ。

(i)　$y^2=8x$　$(2,\ -4)$　　(ii)　$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{4}=1$　$(\sqrt{3},\ \sqrt{2})$

(iii)　$x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$　$(2,\ 2\sqrt{3})$　　(iv)　$x^2-2y^2=-2$　$(-4,\ 3)$

(2)　点 $(0,\ 2)$ から楕円 $2x^2+y^2=2$ に引いた接線の方程式を求めよ。

[解答]

(1)(i)　求める接線の方程式は

$$-4y=4(x+2)\qquad よって\ y=-x-2$$

(ii)　求める接線の方程式は

$$\frac{\sqrt{3}\,x}{6}+\frac{\sqrt{2}\,y}{4}=1\qquad よって\ y=-\frac{\sqrt{6}}{3}x+2\sqrt{2}$$

(iii)　求める接線の方程式は

$$2x-\frac{2\sqrt{3}\,y}{4}=1\qquad よって\ y=\frac{4\sqrt{3}}{3}x-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

(iv)　$\dfrac{x^2}{2}-y^2=-1$ より，求める接線の方程式は

$$\frac{-4x}{2}-3y=-1\qquad よって\ y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$$

$$\left(-4x-2\cdot 3y=-2\ より\ -4x-6y=-2\qquad よって\ y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\right)$$

(2)(解法 1)

接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ とすると，接線の方程式は

$$2x_1x+y_1y=2\quad \cdots\cdots①$$

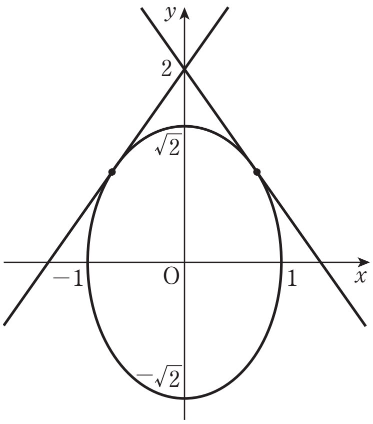
これが点 $(0,\ 2)$ を通るので，$2y_1=2$

よって　$y_1=1$　……②

また，接点は楕円上にあるので

$$2x_1{}^2+y_1{}^2=2\quad \cdots\cdots③$$

②を③に代入して



$2{x_1}^2+1=2$　　$x_1{}^2=\dfrac{1}{2}$　　$x_1=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$x_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$y_1=1$ のとき，①より $\sqrt{2}\,x+y=2$　　よって $y=-\sqrt{2}\,x+2$

$x_1=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$y_1=1$ のとき，①より $-\sqrt{2}\,x+y=2$　　よって $y=\sqrt{2}\,x+2$

したがって，求める接線の方程式は $y=\sqrt{2}\,x+2$，$y=-\sqrt{2}\,x+2$

(解法 2)

点 (0，2) を通る接線は x 軸に垂直ではないので，その方程式は

$y=mx+2$　……①

とおくことができる。これを楕円の方程式 $2x^2+y^2=2$ に代入すると

$2x^2+(mx+2)^2=2$

$(m^2+2)x^2+4mx+2=0$

この方程式の判別式を D とすると，$D=0$ である。

$\dfrac{D}{4}=(2m)^2-(m^2+2)\cdot 2=2m^2-4$ より　$2m^2-4=0$　　$m=\pm\sqrt{2}$

このとき①より，求める接線の方程式は $y=\sqrt{2}\,x+2$，$y=-\sqrt{2}\,x+2$

第 2 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イ：2

[解説]

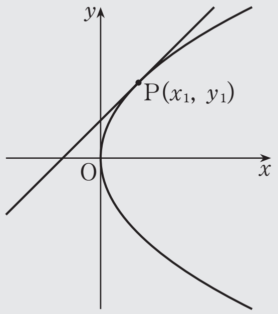
放物線 $y^2=16x$ 上の点 $(1,\ 4)$ における接線の方程式は，

$$4y=8(x+1)$$ [A]

よって，$\boldsymbol{y=2x+2}$

[A]　放物線 $y^2=4px$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は，

$$y_1y=2p(x+x_1)$$



2

[正解] ウ：2，エ：4

[解説]

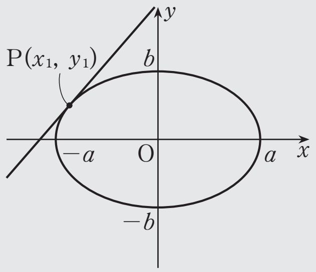
楕円 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{8}=1$ 上の点 $(1,\ -2)$ における接線の方程式は，

$$\frac{1\cdot x}{2}+\frac{-2\cdot y}{8}=1$$ [B]

よって，$\boldsymbol{y=2x-4}$

[B]　楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は，

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$



3

[正解] オ：2，カ：1

[解説]

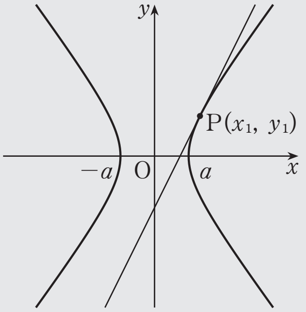
双曲線 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ 上の点 $(-2,\ 3)$ における

接線の方程式は，$\dfrac{(-2)\cdot x}{1}-\dfrac{3\cdot y}{3}=1$ [C]

よって，$\boldsymbol{y=-2x-1}$

[C]　双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は，

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$$



4

[正解] キ：4，ク：3

[解説]

$2x^2-y^2=-4$ より，

$$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=-1$$

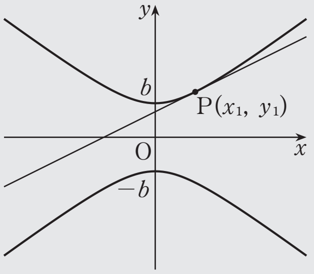
この双曲線上の点 $(4,\ 6)$ における接線の方程式は，

$$\frac{4\cdot x}{2}-\frac{6\cdot y}{4}=-1$$ [D]

よって，$\boldsymbol{4x-3y+2=0}$

[D]　双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は，

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=-1$$



5 **[正解]** ケ：2，コ：4

[解説]

$4x^2+y^2=8$ より，

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{8}=1$$

接点の座標を $(x_1,\ y_1)$ とすると，接線の方程式は，

$$\frac{x_1x}{2}+\frac{y_1y}{8}=1$$

$$4x_1x+y_1y=8 \quad \cdots\cdots ①$$ [E]

[E]　接点の座標を文字でおいて，接線の方程式をつくる。

これが点 (0，4) を通るので，

$$4y_1=8$$

$$y_1=2 \quad \cdots\cdots ②$$

また，接点は楕円上にあるので，

$$4{x_1}^2+{y_1}^2=8 \quad \cdots\cdots ③$$ [F]

[F]　楕円の方程式に $x=x_1$，$y=y_1$ を代入する。

②を③に代入すると，

$$4{x_1}^2+4=8$$

$${x_1}^2=1$$

$$x_1=\pm 1$$

$x_1=1$，$y_1=2$ のとき，①より，

$$4x+2y=8$$

$$y=-2x+4$$

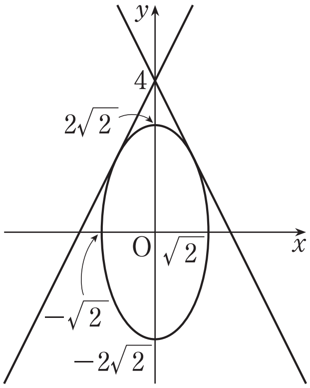
$x_1=-1$，$y_1=2$ のとき，①より，

$$-4x+2y=8$$

$$y=2x+4$$

したがって，求める接線の方程式は，

$$\boldsymbol{y=2x+4,\ y=-2x+4}$$



（別解）

点 $(0,\ 4)$ を通る接線は x 軸に垂直でないので，

その方程式は，

$$y=mx+4 \quad \cdots\cdots①$$

とおくことができる。これを楕円の方程式

$4x^2+y^2=8$ に代入すると，

$$4x^2+(mx+4)^2=8$$

$$(m^2+4)x^2+8mx+8=0$$

この方程式の判別式を D とすると，$D=0$ である。［G］

$$\frac{D}{4}=(4m)^2-(m^2+4)\cdot 8$$

$$=8m^2-32$$

より，$8m^2-32=0$

$$m^2=4$$

$$m=\pm 2$$

①より，求める接線の方程式は，

$$\boldsymbol{y=2x+4,\ y=-2x+4}$$

［G］　楕円と直線が接する
　$\Longleftrightarrow$ $D=0$